УДК 517.984

# ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

О.А. Королева[1]

1 *korolevaoart@yandex.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского

*В настоящей работе изучается равносходимость разложений в тригонометрческие ряды Фурье и по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) интегрального оператора, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат.*

**Ключевые слова**: равносходимость, резольвента, характеристические числа, собственные и присоединенные функции.

Рассмотрим интегральный оператор:

$$y = Af = \int_0^1 A(x,t)\, f(t)\, dt. \tag{1}$$

Обозначим:
$A_1(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le 1/2 - x, 0 \le x \le 1/2\}$,
$A_2(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 + x \le t \le 1, 0 \le x \le 1/2\}$,
$A_3(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le -1/2 + x, 1/2 \le x \le 1\}$,
$A_4(x,t) = A(x,t)$, если $\{3/2 - x \le t \le 1, 1/2 \le x \le 1\}$,
$A_5(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 - x \le t \le 1/2 + x, 0 \le x \le 1/2\}$ и
$\{-1/2 + x \le t \le 3/2 - x, 1/2 \le x \le 1\}$.

Будем предполагать, что $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A_i(x,t)$, $(i = 1,\dots,5)$ непрерывны в своих областях, $(k + l \le 2$, причем, если $k + l = 2$, то $k = l = 1)$; $\frac{\partial}{\partial x} A_i(x,t)$, $(i = 1,\dots,5)$ непрерывно дифференцируемы в своих областях, причем
$A_5(x, \frac{1}{2} - x + 0) - A_1(x, \frac{1}{2} - x - 0) = a$,
$A_5(x, \frac{1}{2} + x - 0) - A_2(x, \frac{1}{2} + x + 0) = b$,
$A_5(x, -\frac{1}{2} + x + 0) - A_3(x, -\frac{1}{2} + x - 0) = c$,
$A_5(x, \frac{3}{2} - x - 0) - A_4(x, \frac{3}{2} - x + 0) = d$,
где $a, b, c, d$ – постоянные.

Ядро $A(x,t)$ может быть имеет скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат. В пространстве вектор–функций рассматривается оператор

$$z = Bg = \int_0^{\frac{1}{2}} B(x,t) g(t)\, dt, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \tag{2}$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))^T$,

$$B(x,t)=\begin{pmatrix} 0 & A(x,\frac{1}{2}-t) & A(x,\frac{1}{2}+t) & 0\\ A(\frac{1}{2}-x,t) & 0 & 0 & A(\frac{1}{2}-x,1-t)\\ A(\frac{1}{2}+x,t) & 0 & 0 & A(\frac{1}{2}+x,1-t)\\ 0 & A(1-x,\frac{1}{2}-t) & A(1-x,\frac{1}{2}+t) & 0 \end{pmatrix}.$$

В [1] доказывается, что (1) эквивалентно (2).

**Теорема 1.** *Для оператора $B^{-1}$ справедливо представление:*

$$B^{-1}z(x)=Pz'(x)+a_1(x)z(0)+a_2(x)z(1/2)+a_3(x)z(x)+\int_0^{\frac{1}{2}}a(x,t)z(t)\,dt, \tag{3}$$

$$Sz(0)+Tz(1/2)+\int_0^{\frac{1}{2}}a(t)z(t)\,dt=0. \tag{4}$$

*где $a_i(x)$, $i=\overline{1,3}$, $a_3^{'}(x)$, $a(x)$ – непрерывные матрицы–функции, каждая компонента матрицы a(x,t) имеет такой же характер гладкости, что и компоненты $B_x(x,t)$, $S$, $T$ –некоторые постоянные матрицы порядка* $4\times4$.

Находится резольвента оператора $A$:

**Теорема 2.** *Если $R_\lambda$ существует, то $R_\lambda f=v(x)$, где*

$$v(x)=z_1(x)\,\text{при}\;x\in[0,1/2],\;\text{и}\;v(x)=z_3\left(x-\frac{1}{2}\right)\text{при}\;x\in[1/2,1], \tag{5}$$

*где $z_1,z_3$ – первая и третья компоненты вектора $z(x)$, удовлетворяющего системе (3), (4).*

Также доказывается обратное утверждение:

**Теорема 3.** *Если $\lambda$ таково, что однородная краевая задача для (3), (4)) имеет только нулевое решение, то $R_\lambda$ существует и определяется по формуле (5).*

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} w'(x)=\lambda Dw(x)+m(x),\\ U(w)=0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $m(x)$ произвольная вектор-функция с компонентами из $L[0,\frac{1}{2}]$.

Если удалить все собственные значения краевой задачи (6) вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса $\delta$, то в получившейся области $S_\delta$ для решения системы (6) $w=R_{1\lambda}m$ доказываются оценки:

$$\|R_{1\lambda}m\|_\infty=O(\|m\|_1),\quad \|R_{1\lambda}m\|_\infty=O(\psi(\lambda)\,\|m\|_\infty),\quad \|R_{1\lambda}m\|_1=O(\psi(\lambda)\,\|m\|_1),$$
$$\left\|R_{1\lambda}\chi\right\|_\infty=O(\tfrac{1}{\lambda}),$$

где $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ – нормы в пространстве вектор функций $L_\infty(0,\frac{1}{2})$, $L(0,\frac{1}{2})$, $\chi(x)$ – вектор функция, у которой каждая компонента есть характеристическая функция какого-нибудь отрезка, содержащегося в $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\psi(\lambda)=\sum_{j=1}^4\kappa\left(\left|\mathrm{Re}\,\lambda\omega_j\right|\right)$, $\kappa(y)=\frac{1-e^{-y}}{y}$ при $y\geq0$ ($\mathrm{Re}\,t$ обозначает действительную часть комплексного числа $t$).

Основной результат – теорема равносходимости:

**Теорема 4.** *Пусть существует $A^{-1}$, ядро $A(x,t)$ удовлетворяет описанным выше условиям. Тогда в $S_\delta$ для любой $f(x)\in L[0,1]$*

$$\lim_{r\to\infty}\|S_r(f,x)-\sum_{j=1}^{4}\gamma_{1j}\sigma_{r|\omega_j|}(\varphi_j,x)\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]}=0,$$

$$\lim_{r\to\infty}\|S_r(f,x)-\sum_{j=1}^{4}\gamma_{3j}\sigma_{r|\omega_j|}\left(\varphi_j,x-\frac{1}{2}\right)\|_{[\frac{1}{2}+\varepsilon,1-\varepsilon]}=0,$$

*где $S_r(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье, по с.п.ф. оператора $A$ для тех характеристических чисел $\lambda_k$, для которых $|\lambda_k|<r,\sigma_r(f,x)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье на $[0,\frac{1}{2}]$ по системе $\{e^{4k\pi ix}\}$ для тех $k$, для которых $|4k\pi|<r$, $\gamma_{ij}\,(\delta_{ij})$ компоненты некоторой постоянной матрицы $\Gamma(\Gamma^{-1})$,*

$$\varphi_j(x)=\delta_{j1}f(x)+\delta_{j2}f(\frac{1}{2}-x)+\delta_{j3}f(\frac{1}{2}+x)+\delta_{j4}f(1-x).$$

## Литература

1. Королева О. А., Хромов А П. *Интегральный оператор с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях* // Известия Сарат. ун-та. Новая серия. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та – 2012. – Т. 12(2). –С. 6–13.

INTEGRAL OPERATOR WITH KERNEL HAVING JUMPS ON BROKEN LINES

O.A. Koroleva

*We study equiconvergence expansions in trigonometric Fourier series and series by eigenfunctions and associated functions of an integral operator whose kernel has jumps at the sides of a square inscribed in the unit square.*

Keywords: equiconvergence, resolvent, characteristic number, eigenfunctions and associated functions.

УДК 517.934+517.92:62-50

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

П.А. Котов[1]

1 *petercotov@yandex.ru*; Воронежский государственный университет, Воронеж

*Рассматривается гидродинамическая задача о неустановившемся течении несжимаемой маловязкой жидкости с ограниченными измеримыми краевыми условиями и предлагаются содержательные аспекты устойчивости решения вещественной системы уравнений Навье-Стокса из класса гладких убывающих на бесконечности функций.*

**Ключевые слова**: неустановившееся течение несжимаемой немагнитной жидкости, действительные нулевые граничные условия.

Рассматривается гидродинамическая задача о неустановившемся течении несжимаемой маловязкой жидкости с ограниченными измеримыми краевыми